4e année (1983-1984) 2 3 JAN. 1984 Septembre 1983 - Mensuel n° 1

Revue de Mathématiques Spéciales

Ce premier numéro de la 94e année de la *Revue de Mathématiques spéciales* propose un choix de ujets donnés en 1983 aux concours d'Agrégation et du CAPES et aux concours d'entrée aux Grandes coles.

Cette documentation sera complétée par la parution dans les prochains numéros de questions rales proposées à différents concours d'entrée aux Grandes Écoles.

Les énoncés précédés d'un numéro seront résolus dans le courant de l'année 1983-1984, selon les révisions de parution qui figurent dans le numéro 2. Nos lecteurs peuvent nous faire parvenir des olutions de ces problèmes; la Rédaction examinera celles lui parvenant un mois avant la date de arution prévue.

Agrégation de mathématiques

lathématiques générales

355. On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, le produit scalaire de deux vecteurs x et y étant noté $(x|y)$. Si x est un élément non nul de E, on note H_x l'hyperplan orthogonal à x et w_x la métrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_x. On appelle partie radicielle de E toute partie R de E vérifiant :

(i) R est finie, engendre E et ne contient pas 0;

(ii) $\forall r \in R, \quad w_r(R) \subset R$;

(iii) $\forall r \in R, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda r \in R \Rightarrow \lambda = +1)$.

On se fixe par la suite une telle partie radicielle de E. On note $\mathscr{H} = \{H_r | r \in R\}$ et W le sous-groupe du groupe thogonal de E engendré par les w_r pour r parcourant R. E est muni de sa topologie naturelle.

PARTIE I.

I.1. Montrer que W est fini. Son cardinal sera noté par la suite $|W|$.

I.2. Soit $E' = E \setminus \bigcup_{H \in \mathscr{H}} H$. Soit x un élément de E'. Rappeler pourquoi il existe une partie connexe maximale E' contenant x (composante connexe de x dans E'). Une telle partie sera appelée une chambre (relativement à Montrer que deux chambres distinctes sont disjointes.

I.3. Montrer que la chambre contenant le vecteur x de E' est l'intersection des demi-espaces ouverts délimités r les hyperplans de $\mathscr{H}$ et qui contiennent x.

I.4. Soit C une chambre. On dit qu'un hyperplan $H \in \mathscr{H}$ est un mur de C si l'adhérence $\bar{C}$ de C contient un vert de H. Montrer que tout hyperplan H de $\mathscr{H}$ est mur d'au moins une chambre.

Dans toute la suite du problème on se fixe une chambre C dont on note les murs $H_1, \ldots, H_l$. Po $i \in \{1, \ldots, l\}$, on désigne par w_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i. Soit W' le sous-groupe de W engend par $w_1, \ldots, w_l$.

I.5.a) Soit $b \in E'$. On suppose que b est du même côté que C par rapport à tout mur de C. Montrer que appartient à C.

I.5.b) Soit C' une chambre. Montrer qu'il existe $w \in W'$ tel que $w(C') = C$. (Indication : on se fixe $a \in C$ $a' \in C'$. Considérer $\inf_{w \in W'} d(a, w(a'))$.)

I.5.c) En déduire, en utilisant **I.4**, que $W' = W$.

I.6.a) Soit $x \in C$. On note R^+ l'ensemble des $r \in R$ tels que $(x|r) > 0$ et R^- l'ensemble des $r \in R$ tels qu $(x|r) < 0$. Montrer que la partition de R en R^+ et R^- ne dépend pas du choix de x dans C. Les éléments de R seront dits positifs, ceux de R^- négatifs.

Si w appartient à W, on note $n(w)$ le cardinal de l'ensemble $\{r \in R^+ | w(r) \in R^-\}$. Pour $i \in \{1, \ldots, l\}$, o désigne par s_i l'élément de R^+ orthogonal à H_i. Soit $\Pi = \{s_1, \ldots, s_l\}$. On définit d'autre part une application dite longueur, de W dans l'ensemble des entiers naturels de la manière suivante : on pose $l(\mathrm{Id}) = 0$ et s $w \in W \backslash \{\mathrm{Id}\}$, $l(w)$ est le plus petit entier k tel qu'il existe $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que l'on ait :

$$w = w_{i_1} \ldots w_{i_k}.$$

I.6.b) Soit H un mur de C et r l'élément de R^+ orthogonal à H. On considère H' un hyperplan appartenant à $\mathscr{H}$, distinct de H. Montrer que C et $w_r(C)$ sont d'un même côté de H' (Indication : on pourra utiliser une boule centrée sur H et ne rencontrant pas H'). En déduire que $w_r(r') \in R^+$ pour tout $r' \in R^+$ distinct de r.

I.6.c) Montrer : $\forall w \in W$, $\forall r \in \Pi$, $n(ww_r) = n(w) + \varepsilon_{r,w}$ avec

$$\varepsilon_{r,w} = +1 \quad \text{si} \quad w(r) \in R^+ \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{r,w} = -1 \quad \text{si} \quad w(r) \in R^-.$$

En déduire $\forall w \in W$, $n(w) \leqslant l(w)$.

I.6.d) Soit $w \in W$ et soit $w = w_{r_1} \ldots w_{r_k}$ une décomposition de w avec

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \qquad r_i \in \Pi.$$

On suppose $k > n(w)$. Montrer qu'il existe un indice $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tel que

$$w_{r_1} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-,$$

puis qu'il existe un indice $i \in \{1, \ldots, j\}$ tel que

$$w_{r_i} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^- \qquad \text{et} \qquad w_{r_{i+1}} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^+.$$

En déduire que : $w_{r_{i+1}} \ldots w_{r_{j+1}} = w_{r_i} \ldots w_{r_j}$, puis que $l(w) < k$.

I.6.e) Montrer que $\forall w \in W$, $n(w) = l(w)$.

I.7. Montrer que si $w \in W$ vérifie $w(C) = C$, alors $w = \mathrm{Id}_E$.

Partie II.

II.1. Soit x un élément non nul de E et $y \in E$. Montrer $w_x(y) = y - \dfrac{2(x|y)}{(x|x)} x$.

II.2.a) Montrer $\forall r \in R$, $\exists w \in W$, $\exists s \in \Pi$, $r = w(s)$.

II.2.b) Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par Π est stable par W et en déduire que Π est une partie génératrice de E.

II.3. Soit r_1 et r_2 deux éléments distincts de Π.

II.3.a) Montrer, pour $i \in \{1, 2\}$ l'existence d'un élément b_i de $\bar{C} \cap H_{r_i}$ tel que b_i n'appartienne à aucun hyperplan $H \in \mathscr{H} \backslash \{H_{r_i}\}$.

II.3.b) b_1 et b_2 étant ainsi choisis, montrer que tout point du segment $[b_1, b_2]$ distinct de b_1 et b_2 appartient à C.

II.3.*c*) Soit L un hyperplan de E contenant l'intersection $H_{r_1} \cap H_{r_2}$. On suppose que L contient un élément x vérifiant : $(x|r_1) > 0$ et $(x|r_2) > 0$. Montrer que L rencontre C (on pourra prendre un vecteur $v \in L^{\perp}\backslash\{0\}$ et considérer les signes de $(v|b_1)$ et $(v|b_2)$).

II.3.*d*) En considérant l'hyperplan $L = w_{r_2}(H_{r_1})$ montrer que $(r_1|r_2) \leqslant 0$.

II.4. Montrer que Π est une base de E (dans une relation de dépendance linéaire entre les s_i on pourra séparer les coefficients positifs et les coefficients négatifs).

II.5. Soit R^{++} l'ensemble des éléments de R dont toutes les coordonnées dans la base Π sont positives ou nulles. On fait l'hypothèse suivante : $R^{++} \neq R^{+}$. Si r appartient à $R^{+}\backslash R^{++}$, on note $\theta(r)$ la somme des coordonnées de r dans la base Π et on choisit r_0 dans $R^{+}\backslash R^{++}$ vérifiant

$$\forall r \in R^{+}\backslash R^{++}, \qquad \theta(r_0) \leqslant \theta(r).$$

On pose $r_0 = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i$.

II.5.*a*) Soit $i \in \{1, \ldots, l\}$ tel que $\lambda_i \geqslant 0$. En considérant $w_{s_i}(r_0)$ montrer que $(r_0|s_i) \leqslant 0$.

II.5.*b*) Soit $v = \sum_i \lambda_i s_i$ la somme étant prise sur les indices i pour lesquels $\lambda_i \geqslant 0$. Montrer $(v|v) \leqslant 0$ et en conclure que l'hypothèse faite était absurde et que donc $R^{+} = R^{++}$.

Soit J une partie de Π. Soit E_J le sous-espace vectoriel de E engendré par J, soit $R_J = R \cap E_J$, W_J le sous-groupe de W engendré par $\{w_r | r \in J\}$ et

$$C_J = \{x \in E_J | \forall r \in J\ (r|x) > 0\}.$$

II.6. Montrer que R_J est un système radiciel dans E_J, que C_J en est une chambre et que les murs de C_J sont les $H_r \cap E_J$ pour r parcourant J. En déduire que le groupe associé à ce système radiciel est isomorphe à W_J.

II.7. Soit $D_J = \{w \in W | \forall r \in J,\ w(r) \in R^{+}\}$. Montrer que pour tout élément w de W il existe un unique couple $(d_J, w_J) \in D_J \times W_J$ tel que $w = d_J w_J$. Montrer de plus que $l(w) = l(d_J) + l(w_J)$.

II.8. Soit $K_J = \{v \in E_J^{\perp} | \forall r \in \Pi\backslash J,\ (v|r) > 0\}$.

II.8.*a*) Montrer que K_J n'est pas vide.

II.8.*b*) Montrer que K_J est contenu dans l'adhérence de la chambre C.

II.8.*c*) Soit J et J′ deux parties de Π. On suppose qu'il existe $w \in W$ vérifiant $w(K_J) \cap K_{J'} \neq \varnothing$. Montrer que $J = J'$.

II.9. Montrer $W_J = \{w \in W | w(K_J) \subset K_J\} = \{w \in W | \forall x \in K_J,\ w(x) = x\}$.

II.10. Soit x un élément de E. Montrer qu'il existe une unique partie J de Π vérifiant : il existe $w \in W$ tel que $w(x) \in K_J$.

Partie III.

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_l)$ une base de E. Une application f de E dans $\mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_l]$ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l, \qquad f(x_1 e_1 + \cdots + x_l e_l) = P(x_1, \ldots, x_l).$$

Il est clair que cette définition est en fait indépendante de la base choisie, de même que le degré de P (qui sera donc appelé degré de f) ou que le fait que le polynôme P soit homogène (on dira alors que f est homogène). Les applications polynomiales forment une sous-algèbre de l'algèbre des applications de E dans $\mathbb{R}$. Cette sous-algèbre sera notée S ; elle est isomorphe à $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_l]$. Soit

$$S^{+} = \{f \in S | f(0) = 0\}.$$

On fait agir W sur S en posant $\forall w \in W$, $\forall p \in S$, $\forall x \in E$, $w(p)(x) = p(w^{-1}(x))$. Soit I la sous-$\mathbb{R}$algèbre de S des éléments invariants par W : $I = \{p \in S | \forall w \in W,\ w(p) = p\}$. Soit $I^{+} = S^{+} \cap I$ et soit SI^{+} l'idéal de S engendré par I^{+}. Si $p \in S$, on pose

$$m(p) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w(p).$$

III.1. Montrer que si p appartient à S alors $m(p)$ appartient à I et que si p appartient à S^+ alors $m(p)$ appartient à I^+.

III.2. Montrer qu'il existe une partie finie de I formée de fonctions polynomiales homogènes et engendrant l'idéal SI^+ (on admettra que S vérifie la propriété suivante : soit J un idéal de S et G une partie génératrice de J alors G contient une partie finie génératrice de J). On se fixe une telle partie $\{I_1, \ldots, I_s\}$, que l'on suppose de plus minimale pour cette propriété. On pose $d_i = \deg(I_i)$ pour i variant de 1 à s.

III.3. Montrer $\forall f \in I$, $\exists P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_s]$, $f = P(I_1, \ldots, I_s)$. (On se ramènera à montrer le résultat pour f homogène et on fera une récurrence sur le degré de f.)

III.4. Soit $f_1, \ldots, f_k$ des éléments de I tels que f_1 n'est pas dans l'idéal de I engendré par $f_2, \ldots, f_k$. Soit $p_1, \ldots, p_k$ des éléments homogènes de S. On cherche à démontrer par récurrence sur le degré p_1 la propriété suivante :

$$p_1 f_1 + \cdots + p_k f_k = 0 \Rightarrow p_1 \in SI^+.$$

III.4.*a*) Montrer que f_1 n'est pas dans l'idéal de S engendré par $f_2, \ldots, f_k$ et conclure dans le cas où p_1 est constant.

III.4.*b*) On suppose désormais $\deg(p_1) > 0$. Soit $r \in R$ et h_r l'élément de S défini par $\forall x \in E$, $h_r(x) = (r|x)$. Montrer que h_r divise dans S, $w_r(p_i) - p_i$ pour i variant de 1 à k. On posera

$$w_r(p_i) - p_i = h_r q_i.$$

III.4.*c*) Montrer $q_1 f_1 + \cdots + q_k f_k = 0$.

III.4.*d*) En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que :

$$\forall w \in W, \quad w(p_1) - p_1 \in SI^+$$

et en déduire que p_1 appartient à SI^+.

III.5. Soit $d \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_s]$, $P = \sum_{(k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s} a_{k_1, \ldots, k_s} X_1^{k_1} \ldots X_s^{k_s}$.

On suppose vérifiées les trois conditions :

$$(a)\quad P \neq 0; \qquad (b)\quad P(I_1, \ldots, I_s) = 0;$$

$$(c)\quad \text{si } a_{k_1, \ldots, k_s} \text{ est non nul, alors } k_1 d_1 + \cdots + k_s d_s \text{ est égal à } d.$$

Pour $i = 1, \ldots, s$ soit $p_i = \dfrac{\partial P}{\partial X_i}(I_1, \ldots, I_s)$. Soit K l'idéal de I engendré par $\{p_1, \ldots, p_s\}$ et on suppose les notations choisies de telle manière que $\{p_1, \ldots, p_m\}$ soit une partie génératrice minimale de cet idéal.

III.5.*a*) Montrer que les applications polynomiales p_i sont homogènes.

III.5.*b*) Montrer qu'il existe pour $i > m$ et $1 \leqslant j \leqslant m$ des applications polynomiales $q_{i,j}$ homogènes de degré $\deg(I_j) - \deg(I_i)$ telles que

$$\forall i > m, \quad p_i = \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} p_j.$$

III.5.*c*) On se fixe une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_l)$ de E et si f est élément de S on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ la k-ième dérivée partielle de l'application $(x_1, \ldots, x_l) \mapsto f(x_1 e_1 + \cdots + x_l e_l)$.

Montrer pour $k = 1, \ldots, l$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\partial I_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{s} q_{j,i} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \right) = 0$ et en déduire

$$\forall k \in \{1, \ldots, l\} \qquad \frac{\partial I_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{s} q_{j,1} \frac{\partial I_j}{\partial x_k} \in SI^+.$$

III.5.*d*) Montrer qu'il existe des éléments $R_1, \ldots, R_s$ de S^+ tels que

$$d_1 I_1 + \sum_{j=m+1}^{s} d_j q_{j,1} I_j = \sum_{i=1}^{s} I_i R_i.$$

III.5.*e*) Montrer que ceci contredit la définition de $I_1, \ldots, I_s$.

III.6. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_s]$ tel que $P(I_1, \ldots, I_s) = 0$. Montrer que $P = 0$ (c'est-à-dire que I est isomorphe à $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_s]$).

III.7. Soit $I'_1, \ldots, I'_t$ une autre partie finie de I formée de fonctions polynomiales homogènes, engendrant l'idéal SI^+ et minimale pour cette propriété. Montrer que $s = t$.

Partie IV.

Soit N le cardinal de R^+.

IV.1. Montrer qu'il existe un unique élément w_0 de W de longueur N et que $\forall w \in W$, $l(w) \leqslant N$.
A toute partie J et Π on associe les deux polynômes :

$$P_J(t) = \sum_{w \in W_J} t^{l(w)} \quad \text{et} \quad T_J(t) = \sum_{w \in D_J} t^{l(w)} \quad (D_J \text{ est défini en } \mathbf{II.7}).$$

IV.2. Montrer $P_\Pi(t) = P_J(t)T_J(t)$ et en déduire : (|J| désignant le cardinal de la partie J)

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{P_\Pi(t)}{P_J(t)} = t^N.$$

IV.3. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{H}$ une famille finie d'hyperplans de F. On introduit sur F la relation d'équivalence suivante : $x \mathcal{R} y$ signifie : pour tout hyperplan H de $\mathcal{H}$, ou bien x et y sont tous deux sur H, ou bien x et y appartiennent à un même demi-espace ouvert limité par H. Pour i entier naturel on désigne par n_i le nombre de classes d'équivalence engendrant dans F un sous-espace vectoriel de dimension i. Montrer que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i = (-1)^{\dim F}.$$

(On pourra faire une récurrence sur le nombre d'hyperplans.)
Si J est une partie de Π et w un élément de W, on note $n_J(w)$ le nombre de classes à gauche vW_J dans W telles que $wvW_J = vW_J$.

IV.4.*a*) Soit v un élément de W. Montrer que $wvW_J = vW_J$ si et seulement si $wv(K_J) = v(K_J)$ (cf. notations de **II.8**) et que dans ce cas $v(K_J)$ est contenu dans $\operatorname{Ker}(w - \mathrm{Id}_E)$.

IV.4.*b*) En appliquant les résultats de la question **IV.3** à $F = \operatorname{Ker}(w - \mathrm{Id}_E)$ montrer que

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} n_J(w) = \text{dét}(w).$$

IV.5. Soit f un élément de S vérifiant $\forall w \in W$, $w(f) = \text{dét}(w) f$. Montrer qu'il existe un élément p de I tel que

$$f = p \prod_{r \in R^+} h_r$$

(se reporter à **III.4** pour la signification de h_r).

Soit S_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré n, soit

$$I_n = I \cap S_n, \qquad A_n = \{f \in S_n \mid \forall w \in W, w(f) = \text{dét}(w) f\}.$$

Soit U_n l'application linéaire de S_n dans S_n définie par : (cf. III), $U_n(f) = m(f)$. Pour un élément w de W on désigne par $\chi_n(w)$ la trace de l'application linéaire $f \mapsto w(f)$ de S_n dans S_n.

IV.6. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim A_n = \dim I_{n-N} (= 0 \text{ si } n < N)$ et $\dim I_n = \operatorname{tr}(U_n)$.

IV.7. Montrer $\forall w \in W$, $\displaystyle\sum_{v \in W,\, vwv^{-1} \in W_J} \chi_n(vwv^{-1}) = \chi_n(w) n_J(w) |W_J|$ et en déduire

$$\sum_{J \subset \Pi} \frac{(-1)^{|J|}}{|W_J|} \sum_{v \in W,\, vwv^{-1} \in W_J} \chi_n(vwv^{-1}) = \chi_n(w)\, \text{dét}(w).$$

IV.8. En sommant l'identité précédente sur $w \in W$, montrer que

$$\prod_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \dim(I_{J,n}) = \dim A_n \quad \text{où} \quad I_{J,n} = \{f \in S_n \mid \forall w \in W_J,\ w(f) = f\}.$$

IV.9. Soit $d_1, \ldots, d_s$ les entiers naturels définis en **III.2.** On définit le polynôme

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{t^{d_i} - 1}{t - 1} \right)$$

et de même à toute partie J de Π on associe un polynôme $Q_J(t)$ défini de la même manière, mais pour le système radiciel R_J dans E_J.

IV.9.*a*) Montrer que le coefficient de t^n dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^s Q(t)}$$

est $\dim(I_n)$.

IV.9.*b*) On admettra à partir de maintenant que $s = l$. Montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{Q(t)}{Q_J(t)} = t^N.$$

IV.10.*a*) Soit J une partie de Π et w un élément de W_J. Montrer que la longueur de w est la même que l'on considère w comme élément du groupe W associé au système radiciel R ou du groupe W_J associé à R_J.

IV.10.*b*) Montrer que $Q = P_\Pi$ (utiliser un raisonnement par récurrence).

Agrégation de mathématiques

Composition d'analyse

PRÉAMBULE.

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à l'intervalle $[-\pi, \pi[$, et on pose

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg}(z),$$

puis, pour tout nombre complexe a, $z^a = e^{a \operatorname{Log}(z)}$.

Si z est un nombre complexe, on note $\operatorname{Re}(z)$ sa partie réelle, $\operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

Les propriétés suivantes de la fonction Γ pourront être utilisées sans démonstration.

Pour $\operatorname{Re}(z) > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt.$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Si z n'est pas un pôle, on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \text{et} \qquad \Gamma(z) \neq 0.$$

Soit δ un nombre réel, $0 < \delta \leqslant \pi$. Le nombre complexe a étant fixé, on a, pour z complexe vérifiant $|\operatorname{Arg} z| \leqslant \pi - \delta$,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^a} = 1.$$